

**Zadatak.** Četiri čoveka nose prezimena Smith, Baker, Carpenter i Taylor i imaju neku od četiri profesije: kovač (smith), pekar (baker), stolar (carpenter) i krojač (tailor), ali ni jedan od njih nema profesiju koja je sadržana u njegovom prezimenu. Takođe, svaki od njih ima po jednog sina koji se takođe bave nekom od ove četiri profesije, ali takođe niko onom profesijom koja je sadržana u njegovom prezimenu. Niko od sinova nema istu profesiju kao svoj otac. Baker ima istu profesiju kao Carpenter-ov sin, dok je Smith-ov sin pekar. Pronađi profesije očeva i sinova.

**Rešenje.** Uvodimo iskazne varijable  $x_{ij}$  koje označavaju da se čovek  $i$  bavi profesijom  $j$  (pri čemu i osobe i profesije indeksiramo onim redom kako je navedeno u tekstu zadatka). Uslovi da se svaki od četiri čoveka bavi nekom od četiri profesije mogu se iskazati na sledeći način:

$$\begin{aligned} (x_{11} \vee x_{12} \vee x_{13} \vee x_{14}) & \wedge \\ (x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23} \vee x_{24}) & \wedge \\ (x_{31} \vee x_{32} \vee x_{33} \vee x_{34}) & \wedge \\ (x_{41} \vee x_{42} \vee x_{43} \vee x_{44}) & \end{aligned}$$

Uslovi da se svaki od njih bavi tačno jednom profesijom, tj. da se ne može istovremeno baviti nekim parom gornjih profesija iskazuju se na sledeći način:

$$\begin{aligned} (\neg x_{11} \vee \neg x_{12}) & \wedge \\ (\neg x_{11} \vee \neg x_{13}) & \wedge \\ (\neg x_{11} \vee \neg x_{14}) & \wedge \\ (\neg x_{12} \vee \neg x_{13}) & \wedge \\ (\neg x_{12} \vee \neg x_{14}) & \wedge \\ (\neg x_{13} \vee \neg x_{14}) & \wedge \\ (\neg x_{21} \vee \neg x_{22}) & \wedge \\ (\neg x_{21} \vee \neg x_{23}) & \wedge \\ (\neg x_{21} \vee \neg x_{24}) & \wedge \\ (\neg x_{22} \vee \neg x_{23}) & \wedge \\ (\neg x_{22} \vee \neg x_{24}) & \wedge \\ (\neg x_{23} \vee \neg x_{24}) & \wedge \\ (\neg x_{31} \vee \neg x_{32}) & \wedge \\ (\neg x_{31} \vee \neg x_{33}) & \wedge \\ (\neg x_{31} \vee \neg x_{34}) & \wedge \\ (\neg x_{32} \vee \neg x_{33}) & \wedge \\ (\neg x_{32} \vee \neg x_{34}) & \wedge \\ (\neg x_{33} \vee \neg x_{34}) & \wedge \\ (\neg x_{41} \vee \neg x_{42}) & \wedge \\ (\neg x_{41} \vee \neg x_{43}) & \wedge \\ (\neg x_{41} \vee \neg x_{44}) & \wedge \\ (\neg x_{42} \vee \neg x_{43}) & \wedge \\ (\neg x_{42} \vee \neg x_{44}) & \wedge \\ (\neg x_{43} \vee \neg x_{44}) & \wedge \end{aligned}$$

Uslovi da se niko ne bavi profesijom sadržanom u svom prezimenu mogu se predstaviti kao:

$$\neg x_{11} \wedge \neg x_{22} \wedge \neg x_{33} \wedge \neg x_{44}$$

Po sličnom principu, uvodimo iskazne varijable  $y_{ij}$  koje označavaju da se  $i$ -ti sin bavi  $j$ -tom profesijom. Sasvim slično, uvodimo skup klauza koje definišu uslove da se sinovi bave nekom (tačno jednom) od četiri profesije, kao i da se ne bave profesijom sadržanom u svom prezimenu:

$$\begin{array}{ll}
(y_{11} \vee y_{12} \vee y_{13} \vee y_{14}) & \wedge \\
(y_{21} \vee y_{22} \vee y_{23} \vee y_{24}) & \wedge \\
(y_{31} \vee y_{32} \vee y_{33} \vee y_{34}) & \wedge \\
(y_{41} \vee y_{42} \vee y_{43} \vee y_{44}) & \wedge \\
(\neg y_{11} \vee \neg y_{12}) & \wedge \\
(\neg y_{11} \vee \neg y_{13}) & \wedge \\
(\neg y_{11} \vee \neg y_{14}) & \wedge \\
(\neg y_{12} \vee \neg y_{13}) & \wedge \\
(\neg y_{12} \vee \neg y_{14}) & \wedge \\
(\neg y_{13} \vee \neg y_{14}) & \wedge \\
(\neg y_{21} \vee \neg y_{22}) & \wedge \\
(\neg y_{21} \vee \neg y_{23}) & \wedge \\
(\neg y_{21} \vee \neg y_{24}) & \wedge \\
(\neg y_{22} \vee \neg y_{23}) & \wedge \\
(\neg y_{22} \vee \neg y_{24}) & \wedge \\
(\neg y_{23} \vee \neg y_{24}) & \wedge \\
(\neg y_{31} \vee \neg y_{32}) & \wedge \\
(\neg y_{31} \vee \neg y_{33}) & \wedge \\
(\neg y_{31} \vee \neg y_{34}) & \wedge \\
(\neg y_{32} \vee \neg y_{33}) & \wedge \\
(\neg y_{32} \vee \neg y_{34}) & \wedge \\
(\neg y_{33} \vee \neg y_{34}) & \wedge \\
(\neg y_{41} \vee \neg y_{42}) & \wedge \\
(\neg y_{41} \vee \neg y_{43}) & \wedge \\
(\neg y_{41} \vee \neg y_{44}) & \wedge \\
(\neg y_{42} \vee \neg y_{43}) & \wedge \\
(\neg y_{42} \vee \neg y_{44}) & \wedge \\
(\neg y_{43} \vee \neg y_{44}) & \wedge \\
\neg y_{11} & \wedge \\
\neg y_{22} & \wedge \\
\neg y_{33} & \wedge \\
\neg y_{44} & \wedge
\end{array}$$

Uslovi da se sinovi ne bave istim profesijama kao njihovi očevi mogu se izraziti na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&(\neg x_{11} \vee \neg y_{11}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{12} \vee \neg y_{12}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{13} \vee \neg y_{13}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{14} \vee \neg y_{14}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{21} \vee \neg y_{21}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{22} \vee \neg y_{22}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{23} \vee \neg y_{23}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{24} \vee \neg y_{24}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{31} \vee \neg y_{31}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{32} \vee \neg y_{32}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{33} \vee \neg y_{33}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{34} \vee \neg y_{34}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{41} \vee \neg y_{41}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{42} \vee \neg y_{42}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{43} \vee \neg y_{43}) \quad \wedge \\
&(\neg x_{44} \vee \neg y_{44})
\end{aligned}$$

Najzad, uslov da se Baker bavi istom profesijom kao Carpenter-ov sin se izražava kao  $(x_{21} \wedge y_{31}) \vee (x_{22} \wedge y_{32}) \vee (x_{23} \wedge y_{33}) \vee (x_{24} \wedge y_{34})$ , što se transformacijom u CNF svodi na sledeći skup klauza:

$$\begin{aligned}
&(x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23} \vee x_{24}) \quad \wedge \\
&(x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23} \vee y_{34}) \quad \wedge \\
&(x_{21} \vee x_{22} \vee y_{33} \vee x_{24}) \quad \wedge \\
&(x_{21} \vee x_{22} \vee y_{33} \vee y_{34}) \quad \wedge \\
&(x_{21} \vee y_{32} \vee x_{23} \vee x_{24}) \quad \wedge \\
&(x_{21} \vee y_{32} \vee x_{23} \vee y_{34}) \quad \wedge \\
&(x_{21} \vee y_{32} \vee y_{33} \vee x_{24}) \quad \wedge \\
&(x_{21} \vee y_{32} \vee y_{33} \vee y_{34}) \quad \wedge \\
&(y_{31} \vee x_{22} \vee x_{23} \vee x_{24}) \quad \wedge \\
&(y_{31} \vee x_{22} \vee x_{23} \vee y_{34}) \quad \wedge \\
&(y_{31} \vee x_{22} \vee y_{33} \vee x_{24}) \quad \wedge \\
&(y_{31} \vee x_{22} \vee y_{33} \vee y_{34}) \quad \wedge \\
&(y_{31} \vee y_{32} \vee x_{23} \vee x_{24}) \quad \wedge \\
&(y_{31} \vee y_{32} \vee x_{23} \vee y_{34}) \quad \wedge \\
&(y_{31} \vee y_{32} \vee y_{33} \vee x_{24}) \quad \wedge \\
&(y_{31} \vee y_{32} \vee y_{33} \vee y_{34})
\end{aligned}$$

I na kraju, uslov da je Smith-ov sin pekar izražava se jediničnom klauzom  $y_{12}$ . Ovaj skup klauza treba predati SAT rešavaču. Profesije očeva i sinova biće određene varijablama kojima je u zadovoljavajućoj valuaciji dodeljena vrednost 1.

Naš prototipski DPLL-zasnovan SAT rešavač daje sledeći model (prikazujemo samo varijable kojima je dodeljena vrednost 1):

$$x_{13}, x_{21}, x_{32}, x_{41}, y_{12}, y_{23}, y_{31}, y_{42}$$

(Smith je stolar, Baker je kovač, Carpenter je pekar, Tailor je kovač, Smith-ov sin je pekar, Baker-ov sin je stolar, Carpenter-ov sin je kovač, dok je Tailor-ov sin pekar), dok je MINISAT vratio sledeći model:

$$x_{14}, x_{21}, x_{32}, x_{42}, y_{12}, y_{23}, y_{31}, y_{41}$$

(Smith je krojač, Baker je kovač, Carpenter je pekar, Tailor je pekar, Smith-ov sin je pekar, Baker-ov sin je stolar, Carpenter-ov sin je kovač, dok je Tailor-ov sin kovač). Lako se da proveriti da dati modeli zadovoljavaju sve tražene uslove. Takođe, primećujemo da rešenje ovog zadatka nije jedinstveno.