Теорија Морса 2007/08. **Први домаћи задатак**

(1) Доказати да је график глатког пресликавања $f : M \to N$ глатка подмногострукост у $M \times N$.

(2) Нека су $f : R \to M$ и $g : S \to M$ глатка пресликавања.
  (а) Доказати да је f трансверзално на g ако и само ако је
$$f \times g : R \times S \to M \times M, \quad (r, s) \mapsto (f(r), g(s))$$
трансверзално на дијагоналу $\Delta := \{(x, x) \mid x \in M\}$.
  (б) Ако је f трансверзално на g, доказати да је
$$R \times_M S := \{(r, s) \in R \times S \mid f(r) = g(s)\}$$
многострукост димензије $\dim R + \dim S - \dim M$.

(3) Нека су R и S подмногострукости многострукости M, такве да је и $R \cap S$ подмногострукост у M.
  (а) Да ли одатле следи да се R и S секу трансверзално?
  (б) Претпоставимо да је $\dim R \cap S = \dim R + \dim S - \dim M$. Да ли одатле следи да се R и S секу трансверзално?

(4) Нека је $f : M \to N$ имерзија, N повезана и $\dim M = \dim N$.
  (а) Доказати да је f отворено пресликавање.
  (б) Ако је многострукост M компактна, доказати да је f сурјекција.
  (в) Ако је многострукост M компактна, а пресликавање f инјективно, доказати да је f улагање.
  (г) Дати пример инјективне имерзије која није улагање.
  (д) Доказати да не постоји имерзија компактне многострукости M димензије n у $\mathbb{R}^n$. (Упоредити са Витнијевом теоремом о улагању.)

(5) (а) Нека је P компактна оријентисана многострукост димензије $2n$ и S њена компактна оријентисана подмногострукост димензије n. Ако је n непаран број, доказати да је $S \cdot S = 0$.
  (б) Доказати, користећи идеју из (а) и карактеризацију
$$\chi(M) = 0_M \cdot 0_M,$$
где је 0_M нулто сечење у TM („Ојлерова карактеристика једнака је укупном индексу произвољног векторског поља”) да је Ојлерова карактеристика компактне многострукоси непарне димензије једнака нули.

(6) (а) Израчунати хомологију $H_*(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$ дводимензионог торуса $\mathbb{T}^2$
    (а1) користећи Кинетову формулу;
    (а2) користећи Мајер – Вијеторисов низ;
    (а3) користећи CW – декомпозицију.
  (б) Описати кохомолошки прстен $(H^*_{DR}(\mathbb{T}^2), +, \wedge)$.
  (в) Израчунати хомотопске групе $\pi_k(\mathbb{T}^2)$, $k \in \mathbb{N}$ торуса.
  (г) Уопштити овај задатак на n – димензиони торус $\mathbb{T}^n := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ пута}}$.

(7) Нека је M компактна многострукост без границе. Доказати да идентичко пресликавање $\mathrm{id} : M \to M$ није хомотопно константном пресликавању. Да ли исто важи без претпоставке о компактности многострукости M? Да ли исто важи ако је M компактна, а $\partial M \neq \emptyset$?